

图变换及其在图的最小特征值的应用

王东宜, 冯小芸, 张维娟, 王国平*
(新疆师范大学 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 假设 G 是一个简单连通图, 其顶点集 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. 图 G 的邻接矩阵表示为 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中如果两个顶点 v_i 和 v_j 在图 G 中相邻, 则 $a_{ij} = 1$; 否则 $a_{ij} = 0$. 由于 $A(G)$ 是一个实对称矩阵, 所以其特征值可以排列为 $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$, $A(G)$ 的特征值也是图 G 的特征值. 文章首先给出图的三个图变换, 然后应用其确定存在两个有 $n \geq 12$ 个顶点的连通图, 其最小特征值可以达到所有单圈图的补图中最小, 这修改了文献[9]中的主要结果.

关键词: 图变换; 最小特征值; 单圈图; 补图

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008-9659(2024)04-0062-06

简单连通图的最小特征值已经被广泛研究. Ye 等人给出了给定连通度的最小特征值达到最小的图^[1]. Hong 等人给出了平面图最小特征值的下界^[2]. Liu 等人确定了给定悬挂点数的最小特征值达到最小的图^[3]. Wang 等人描述了带有割边的最小特征值达到最小的图^[4].

假定图 $G = (V(G), E(G))$ 的补图表示为 $G^c = (V(G^c), E(G^c))$, 其中 $V(G^c) = V(G)$ 和 $E(G^c) = \{xy : x, y \in V(G), xy \notin E(G)\}$. Li 等人给出了树的补图中最小无符号拉普拉斯特征值达到最小的图^[5]. Yu 等人得到了唯一的连通图, 其最小无符号拉普拉斯特征值在所有单圈图的补图中达到最小值^[6]. Jiang 等人确定了只有两个悬挂点的图中补图的最小特征值达到最小的图^[7]. Fan 等人给出了所有树的补图中最小特征值达到最小的图^[8].

用 $K_{1,n-1}$ 表示有 n 个顶点的星图, $K_{1,n-1} + e$ 表示从星图 $K_{1,n-1}$ 上通过连接一对悬挂点得到的图, 由于 $K_{1,n-1} + e$ 的补集 $(K_{1,n-1} + e)^c$ 包含一个孤立的顶点, 因此它不是连通图. 如果 $|V(G)| = |E(G)|$, 则 G 是单圈图. 如果任意单圈图的阶数大于或等于 12, 则其补图是非二部图.

文章首先给出图的三个图变换, 然后应用其确定存在两个有 $n \geq 12$ 个顶点的连通图, 其最小特征值可以达到所有单圈图的补图中最小. 但文献[9]断言, 带有 $n \geq 20$ 个顶点的图存在唯一的连通图, 其最小特征值在所有单圈图的补图中最小. 文章修改了文献[9]中的主要结果, 通过计算表明文献[9]中的主要结果并不完全正确.

1 预备知识

假设 G 是顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 的图, 并设 $X = (X_{v_1}, X_{v_2}, \dots, X_{v_n})^T$ 为单位向量, 使得 $X_{v_i} = X(v_i)$ ($1 \leq i \leq n$). 对于每个顶点 $v_i \in V(G)$, 有

$$\lambda(G)X_{v_i} = \sum_{v_j \in N_c(v_i)} X_{v_j} \quad (1)$$

[收稿日期] 2024-03-14

[修回日期] 2024-03-28

[基金项目] 新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2023D01A38).

[作者简介] 王东宜(1999-), 女, 硕士研究生, 主要从事图谱理论方面研究, E-mail: 3117735921@qq.com.

* [通讯作者] 王国平(1965-), 男, 教授, 主要从事图谱理论方面研究, E-mail: xj.wgp@163.com.

其中 $N_G(v_i)$ 表示图 G 中点 v_i 的邻点集。方程(1)称为 G 的特征方程。

用 G^c 表示图 G 的补图。设 $C_n^c (n \geq 12)$ 表示所有连通单圈图的补图的集合。显然, $K_{1,n-1} + e$ 的补集不在 $C_n^c (n \geq 12)$ 中。

如果两个图 G 和 H 同构,则表示为 $G \cong H$ 。通过交错定理,可以知道如果图 G 至少包含一条边,那么 $\lambda_n(G) \leq -1$ 当且仅当 $G \cong K_{1,n-1}$ 。 $\lambda_n(G)$ 对应的单位特征向量称为图 G 的最小特征向量。

引理 1 设 $G^c \in C_n^c$ 且 $X = (X_{v_1}, X_{v_2}, \dots, X_{v_n})^T$ 为 G^c 的最小特征向量。那么 X 至少包含两个正项和负项。

证明 (反证法) 若 $v \in V(G) \setminus \{w\}$, 则 $x_w > 0$ 且 $x_v \leq 0$ 。注意到 $G \neq K_{1,n-1}$ 。那么存在一个点 $u \in N_G(w)$ 使得 $N_G(u) \setminus \{w\} \neq \emptyset$ 。根据特征方程(1), 可以知道

$$0 \leq \lambda_n(G^c)X_u = \sum_{v \in N_G(u)} X_v \leq 0$$

由此可以得到对于每个点 $v \in N_G(u)$, 都有 $x_u = 0$ 和 $x_v = 0$ 。再次根据特征方程(1), 还可以知道

$$\lambda_n(G^c)X_w = \sum_{\bar{v} \in N_G(w)} X_{\bar{v}} = \sum_{\bar{v} \in N_G(u) \setminus \{w\}} X_{\bar{v}} + \sum_{v \in N_G(u)} X_v = \sum_{\bar{v} \in N_G(u) \setminus \{w\}} X_{\bar{v}}$$

通过上述方程和特征方程(1), 对顶点 $v' \in N_G(u) \setminus \{w\}$, 有

$$(1 + \lambda_n(G^c))X_{v'} = X_{v'} + \sum_{\bar{v} \in N_G(u) \setminus \{v'\}} X_{\bar{v}} = X_w + \sum_{\bar{v} \in N_G(u) \setminus \{w\}} X_{\bar{v}} = (1 + \lambda_n(G^c))X_w$$

注意到 $\lambda_n(G^c) < -1$ 。从上式可以确定 $X_{v'} = X_w > 0$ 。这个矛盾表明 X 至少包含两个正项。

由于 $-X$ 也是 G^c 的最小特征向量, 可以类似地证明 X 至少包含两个负项。

假设 G 是一个顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 的图, 令 $X = (X_{v_1}, X_{v_2}, \dots, X_{v_n})$ 为单位向量, 使得 $X_{v_i} = X(v_i) (1 \leq i \leq n)$, 那么有

$$X^T A(G) X = 2 \sum_{v_i, v_j \in E(G)} X_{v_i} X_{v_j} \tag{2}$$

设 $V_G^+ = \{v \in V(G) : X_v \geq 0\}$ 且 $V_G^- = \{v \in V(G) : X_v < 0\}$ 。分别用 G_+ 和 G_- 表示由 V_G^+ 和 V_G^- 导出的图 G 的子图。

假设 H_+ 是 G_+ 至少有三个顶点的连通分支, 令 $X_{u'}$ 为 H_+ 所有顶点中的最大分量。如果 H_+ 中存在与 u' 不相邻的顶点 v , 而 v' 是 H_+ 中 v 和 u' 的公共邻点, 则删除边 vv' 并添加新边 vu' , 上述过程称为 H_+ 的 T_1 -变换。下面对图 H_+ 进行一些 T_1 -变换, 将图 H_+ 变换为图 \bar{H}_+ , 其中若 H_+ 包含一个圈, 则 $\bar{H}_+ \cong K_{1, t+e}$; 否则 $\bar{H}_+ \cong K_{1, t}$ ($t = |V(H_+)| - 1$)。考虑 $-X$, 可以类似地定义 H_- 的 T_1 -变换。

如果 uw 是 G 的一条边且 $u \in V(G^+), w \in V(G^-)$, 那么 uw 称为 G 的相对边。假定 uw 是 G 的相对边。如果存在一个顶点 $v \in V_+ \cap (N(u) \setminus \{w\})$, 那么删除边 wv 并添加边 vu , 但如果存在顶点 $v \in V_- \cap (N(u) \setminus \{w\})$, 则删除边 uv 并添加边 wv 。上述过程称为 G 的 T_2 -变换。

令 u'' 和 w'' 分别为 V_G^+ 和 V_G^- 的顶点, 使得 $X_{u''} \geq X_v$ (对于 $v \in V_G^+$) 和 $X_{w''} \leq X_v$ (对于 $v \in V_G^-$)。假定 uw 是 G 的割边, 使得 $u \in V_G^+$ 且 $w \in V_G^-$ 。如果 u 和 u'' 不在 $G - uw$ 的同一分支中, 则删除边 uw 并添加边 uu'' ; 否则添加边 ww'' 。上述过程称为 G 的 T_3 -变换。

备注 1 显然, 如果图 H 是由 G 通过变换 T_1, T_2 和 T_3 之一得到的, 那么 $\sum_{v_i, v_j \in E(G)} X_{v_i} X_{v_j} \leq \sum_{v_i, v_j \in E(H)} X_{v_i} X_{v_j}$ 。

接下来将使用上述三个变换来确定单圈图的补图中最小特征值达到最小的图。

引理 2 令图 G_1 和图 G_2 如图 1 所示。给定一个图 $G^c \in C_n^c (n \geq 12)$, 那么 $\lambda_n(G^c) \geq \max\{\lambda_n(G_1^c), \lambda_n(G_2^c)\}$ 。

证明 如果 $G \in \{G_1, G_2\}$, 则结果显然成立。接下来假设 $G \notin \{G_1, G_2\}$, 假定 $X = (X_{v_1}, X_{v_2}, \dots, X_{v_n})^T$ 为 G^c 的单位最小特征向量。假设 G 中包含的 l 阶的圈 C_l 。现在分两种情况来讨论 G 。

情况 1 对于每个顶点 $v \in V(C_l)$, 有 $X_v \geq 0$ (或 $X_v \leq 0$)。

假设 $l \geq 4$, 令 $X_{u'}$ 为 C_l 所有顶点中的最大分量。然后对 C_l 进行一些 T_1 变换, 得到包含圈 C_3 的结果图 F , 并且有

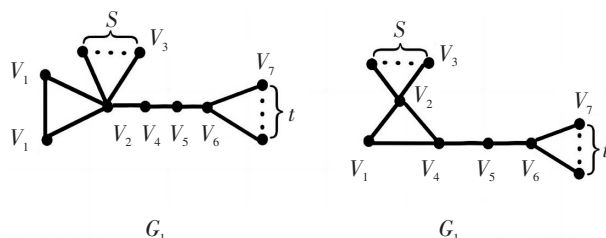


图1 G_1 图和 G_2 图

$$\sum_{v_i, v_j \in E(G)} X_{v_i} X_{v_j} \leq \sum_{v_i, v_j \in E(F)} X_{v_i} X_{v_j} \tag{3}$$

如果 $F \in \{G_1, G_2\}$, 则结果显然; 否则, 根据引理1, 可以找到 F 的相对边 uw , 其中 $u \in V_F^+, w \in V_F^-$. 对 F 进行一些 T_2 变换, 得到结果图 \bar{F} , 其包含的对边比 F 少。这种情况下有

$$\sum_{v_i, v_j \in E(F)} X_{v_i} X_{v_j} \leq \sum_{v_i, v_j \in E(\bar{F})} X_{v_i} X_{v_j} \tag{4}$$

如果 \bar{F} 至少包含两条相对边, 则令 u'' 和 w'' 分别为 $V_{\bar{F}}^+$ 和 $V_{\bar{F}}^-$ 中的顶点, 使得 $X_{u''} \geq X_v$ (对于 $V_{\bar{F}}^+$) 和 $X_{w''} \leq X_v$ (对于 $V_{\bar{F}}^-$). 对 \bar{F} 进行一些 T_3 变换, 直到结果图 \tilde{F} 恰好包含一条相对边 $u_0 w_0$. 可以得到

$$\sum_{v_i, v_j \in E(\tilde{F})} X_{v_i} X_{v_j} \leq \sum_{v_i, v_j \in E(\tilde{F})} X_{v_i} X_{v_j} \tag{5}$$

如果 $\tilde{F} \notin \{G_1, G_2\}$, 令 $X_{\tilde{u}}$ 和 $X_{\tilde{w}}$ 分别为 \tilde{F}_+ 和 \tilde{F}_- 的所有顶点中的最大分量。对 \tilde{F}_+ 和 \tilde{F}_- 进行一些 T_1 -变换, 将 \tilde{F}_+ 和 \tilde{F}_- 分别变换为 $K_{1, p+q}$ 和 $K_{1, q}$. 也就是说, 将 \tilde{F} 变换为图2所示的 G_3, G_4 和 G_5 之一。

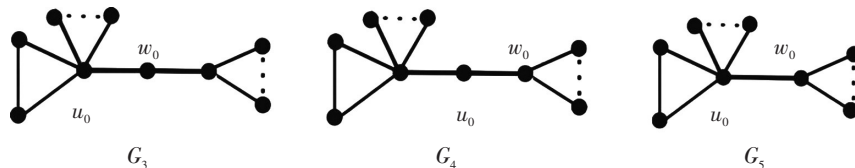


图2 G_3 图、 G_4 图和 G_5 图

因此, 可以选择一些 $G_s (s = 3, 4, 5)$, 使得

$$\sum_{v_i, v_j \in E(\tilde{F})} X_{v_i} X_{v_j} \leq \sum_{v_i, v_j \in E(G_s)} X_{v_i} X_{v_j} \tag{6}$$

设 $\tilde{u} \in V_{\tilde{F}}^+$ 和 $\tilde{w} \in V_{\tilde{F}}^-$ 分别满足 $X_{\tilde{u}} \leq X_v$ (对于 $v \in V_{\tilde{F}}^+$) 和 $X_{\tilde{w}} \geq X_v$ (对于 $v \in V_{\tilde{F}}^-$). 删除边 $u_0 w_0$, 并添加边 $\tilde{u}\tilde{w}$, 得到结果图 G_s , 它与 G_1 和 G_2 之一同构, 因此

$$\sum_{v_i, v_j \in E(G_s)} X_{v_i} X_{v_j} \leq \sum_{v_i, v_j \in E(G_s)} X_{v_i} X_{v_j} \tag{7}$$

情况2 圈 C_l 上有相对边。

如果存在一个顶点 $v \in C_l$, 在 C_l 上有两个邻点 v' 和 v'' , 使得 $X_v X_{v'} \leq 0$ 和 $X_v X_{v''} \leq 0$, 那么对 C_l 进行 T_2 -变换。重复上述过程, 直到将 C_l 转换为 $C_{l'}$, 其中每个顶点 $v \in V(C_{l'})$ 至少有一个邻点 $v' \in V(C_{l'})$, 使得 $X_v X_{v'} \geq 0$, 显然, $l' < l$. 如果对于每个 $v \in V(C_{l'})$, 有 $X_v \geq 0$ (或 $X_v \leq 0$), 则和情况1一样; 否则继续观察圈 $C_{l'}$.

如果环 $C_{l'}$ 上存在连续顶点 v_1, v_2, \dots, v_k , 使得对于任意 i 都有 $k \geq 3$ 和 $X_{v_i} \geq 0$ (或 $X_{v_i} \leq 0$), 则对由顶点 v_1, v_2, \dots, v_k 导出的子图进行 T_1 -变换。重复上述过程, 直到将 $C_{l'}$ 变换为 $C_{l''}$, 其中每个顶点 $v \in V(C_{l''})$ 恰好有一个邻点 $v' \in V(C_{l''})$, 使得 $X_v X_{v'} \geq 0$. 显然, $l'' < l'$. 如果对于每个点 $v \in V(C_{l''})$, 有 $X_v \geq 0$ (或 $X_v \leq 0$), 则和情况1相同; 否则可以观察到圈 $C_{l''}$ 是由相对边和非相对边交替组成的, 所以 l'' 是偶数。

当 $l'' = 4$ 时, 令圈 $C_4 = u_1 u_2 w_1 w_2 u_1$, 其中 $X_{u_i} \geq 0$ 和 $X_{w_i} \leq 0 (i = 1, 2)$. 令 $X_{u_i} \geq 0$ 为 u_1 和 u_2 的所有邻点中的最大分量。如果点 u_3 是 u_1 的邻点, 则删除边 $u_2 w_1$, 并添加边 $u_2 u_3$; 否则删除边 $u_1 w_2$, 并添加边 $u_1 u_3$. 将 C_4 转换为 C_3 , 其中 $X_v \geq 0 (v \in V(C_3))$, 因此和情况1一样。现在令 $l'' = 2m \geq 6$. 设 X_{u_i} 和 X_{w_i} 分别为 $V_{C_{2m}}^+$ 中的最大分量和第二大分量且 $C_{2m} = u_1 u_2 w_1 w_2 \dots u_{s-1} u_s w_{s-1} w_s \dots w_{m-1} w_m u_1$, 其中 $u_i \geq 0$ 和 $w_i < 0 (1 \leq i \leq m)$. 如果 $s = 2$, 令 X_{u_i} 为 $V_{C_{2m}}^+$ 中

的第三大分量。删除边 u_1w_m , 并添加边 u_1u_k , 同时删除边 u_2w_1 , 并添加边 u_2u_k , 将 C_{2m} 转换为 C_3 , 其中 $X_v \geq 0 (v \in V(C_3))$, 此时和情况 1 相同。接下来假设 $s > 2$. 删除边 u_1w_m , 并添加边 u_1u_s , 将 C_{2m} 转换为循环 C_{2s-2} . 如果 $X_{u_s}X_{u_1} \leq X_{u_1}X_{u_{s-1}}$ 则删除边 u_1u_2 , 并添加边 u_1u_{s-1} , 否则删除边 u_1u_{s-1} , 并添加边 u_1u_2 . 这次将 C_{2s-2} 变换为 C_3 , 其中 $X_v \geq 0 (v \in V(C_3))$. 再次和情况 1 相同。

因此, 通过方程(3)(4)(5)(6)和(7)有

$$\sum_{v_i, v_j \in E(G)} X_{v_i}X_{v_j} \leq \sum_{v_i, v_j \in E(F)} X_{v_i}X_{v_j} \leq \sum_{v_i, v_j \in E(\bar{F})} X_{v_i}X_{v_j} \leq \sum_{v_i, v_j \in E(\bar{F})} X_{v_i}X_{v_j} \leq \sum_{v_i, v_j \in E(G_*)} X_{v_i}X_{v_j} \leq \sum_{v_i, v_j \in E(G_*)} X_{v_i}X_{v_j}$$

令 J 和 I 分别表示全 1 矩阵和 n 阶单位矩阵。结合上述不等式和式(2), 由瑞利定理可以得到

$$\lambda_n(G^c) = X^T A(G^c) X = X^T (J - I) X + X^T A(G) X \geq X^T (J - I) X + X^T A(G_*) X = X^T A(G_*) X \geq \lambda_n(G_*)$$

为了表达方便, 将图 1 中的 G_1 和 G_2 分别写为 $G_1(s, t)$ 和 $G_2(s, t)$.

引理 3 令 s 和 t 为两个正整数, 使得 $s + t = n - 6 (n \geq 12)$. 如果 $s > t$, 则有 $\lambda_n(G_1^c(s, t)) > \lambda_n(G_1^c(\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor))$.

证明 只需要验证 $\lambda_n(G_1^c(s, t)) > \lambda_n(G_1^c(\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor))$. 假设 $X = (X_{v_1}, X_{v_2}, \dots, X_{v_n})^T$ 是 $G_1^c(s, t)$ 的单位最小特征向量, 令 $k_1 = \lambda_n(G_1^c(s, t))$ 且 $X_{v_i} = X_i (1 \leq i \leq n)$. 根据 $G_1^c(s, t)$ 的对称性和特征方程(1), 有

$$\begin{cases} k_1 X_1 = sX_3 + X_4 + X_5 + X_6 + tX_7 \\ k_1 X_2 = X_5 + X_6 + tX_7 \\ k_1 X_3 = 2X_1 + (s-1)X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + tX_7 \\ k_1 X_4 = 2X_1 + sX_3 + X_6 + tX_7 \\ k_1 X_5 = 2X_1 + X_2 + sX_3 + tX_7 \\ k_1 X_6 = 2X_1 + X_2 + sX_3 + X_4 \\ k_1 X_7 = 2X_1 + X_2 + sX_3 + X_4 + X_5 + (t-1)X_7 \end{cases}$$

可以将上述方程转化为矩阵方程 $(k_1 I_7 - A_1)X' = 0$, 其中 $X' = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7)^T$ 且

$$A_1(s, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s & 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & t \\ 2 & 0 & s-1 & 1 & 1 & 1 & t \\ 2 & 0 & s & 0 & 0 & 1 & t \\ 2 & 1 & s & 0 & 0 & 0 & t \\ 2 & 1 & s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & s & 1 & 1 & 0 & t-1 \end{bmatrix}$$

令 $f_1(x; s, t) = \det(xI_7 - A_1(s, t))$, 那么有

$$\begin{aligned} f_1(x; s, t) &= x^7 - (t-2+s)x^6 - (6s+6t+8)x^5 - (-2st+10s+6t+22)x^4 - (-7st-10t+10)x^3 \\ &\quad - (-4st-10s-12t-10)x^2 - (4st-3s+t-7)x - 2s-2t \end{aligned}$$

因此, 可以得到

$$f_1(x; s, t) - f_1(x; s-1, t+1) = -x(x+2)(2x-1)((s-t)(x+2)+x) \tag{8}$$

通过计算能得到 $f_1(-2; s, t) = 10$, 因此 $\lambda_n(G_1^c(s, t)) < -2$. 通过方程(8)可知 $f_1(\lambda_n(G_1^c(s, t)); s-1, t+1) > 0$, 这表明 $\lambda_n(G_1^c(s, t)) > \lambda_n(G_1^c(s-1, t+1))$.

引理 4 令 s 和 t 为两个正整数, 使得 $s + t = n - 5 (n \geq 12)$. 如果 $s > t$, 则有

$$\lambda_n(G_2^c(s, t)) > \lambda_n(G_2^c(\lfloor \frac{n-5}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n-5}{2} \rfloor))$$

证明 只需证明 $\lambda_n(G_2^c(s, t)) > \lambda_n(G_2^c(s-1, t+1))$. 假设 $X = (X_{v_1}, X_{v_2}, \dots, X_{v_n})^T$ 是 $G_2^c(s, t)$ 的单位最小特征向量。令 $k_2 = \lambda_n(G_2^c(s, t))$ 和 $X_{v_i} = X_i (1 \leq i \leq n)$. 根据 $G_2^c(s, t)$ 的对称性和特征方程(1), 有

$$\begin{cases} k_2 X_1 = sX_3 + X_5 + X_6 + tX_7 \\ k_2 X_2 = X_5 + X_6 + tX_7 \\ k_2 X_3 = X_1 + (s-1)X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + tX_7 \\ k_2 X_4 = sX_3 + X_6 + tX_7 \\ k_2 X_5 = X_1 + X_2 + sX_3 + tX_7 \\ k_2 X_6 = X_1 + X_2 + sX_3 + X_4 \\ k_2 X_7 = X_1 + X_2 + sX_3 + X_4 + X_5 + (t-1)X_7 \end{cases}$$

可以将上述方程转化为矩阵方程 $(k_2 I_7 - A_2)X' = 0$, 其中 $X' = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7)^T$ 且

$$A_2(s, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s & 0 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & s-1 & 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & 1 & t \\ 1 & 1 & s & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 1 & s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & s & 1 & 1 & 0 & t-1 \end{bmatrix}$$

令 $f_2(x; s, t) = \det(xI_7 - A_2(s, t))$, 那么有

$$\begin{aligned} f_2(x; s, t) &= x^7 - (t-2+s)x^6 - (5s+5t+4)x^5 - (-2st+5s+3t+10)x^4 \\ &\quad - (-5st-5s-6t+3)x^3 - (st-6t-3t-4)x^2 - (3st+s+2t-2)x + st-s \end{aligned}$$

因此, 可以得到

$$f_2(x; s, t) - f_2(x; s-1, t+1) = -(x+1)(2x-1)((s-t)x^2 + (2s-2t-2)x - s+t) \quad (9)$$

讨论得到 $f_2(-3; s-1, t+1) = -344 + 114t + 2s + 28(s-1)(t+1) > 0$, 因此 $\lambda_n(G_2^c(s-1, t+1)) < -3$. 通过方程(9)容易验证 $f_2(\lambda_n(G_2^c(s-1, t+1)); s, t) < 0$. 这表明 $\lambda_n(G_2^c(s, t)) > \lambda_n(G_2^c(s-1, t+1))$.

2 主要结论

结合引理2, 引理3和引理4, 得到以下主要结果。

定理1 对于任意图 $G^c \in C_n^c (n \geq 12)$, 有

$$\lambda_n(G^c) \geq \max \left\{ \lambda_n(G_1^c \left(\left\lfloor \frac{n-6}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n-6}{2} \right\rfloor \right)), \lambda_n(G_2^c \left(\left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor \right)) \right\}$$

等号成立当且仅当 $G \cong G_1 \left(\left\lfloor \frac{n-6}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n-6}{2} \right\rfloor \right)$ 或 $G \cong G_2 \left(\left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor \right)$.

结论1 $\lambda_n(G_1^c(22, 22)) < \lambda_n(G_2^c(23, 22))$.

证明 令 $n = 50$, 可得 $f_1(x; 22, 22) = x^7 - 42x^6 - 272x^5 + 594x^4 + 3598x^3 + 2430x^2 - 1885x - 88$ 和 $f_2(x; 23, 22) = x^7 - 43x^6 - 229x^5 + 821x^4 + 2774x^3 - 298x^2 - 1583x + 483$. 容易验证当 $x < 4.2$ 时, $f_1(x; 22, 22) - f_2(x; 23, 22) > 0$. 但 $f_2(-4.2; 23, 22) = 92025.63258 > 0$, 因此 $\lambda_n(G_1^c(22, 22)) < \lambda_n(G_2^c(23, 22))$.

结论2 $\lambda_n(G_1^c(201, 200)) > \lambda_n(G_2^c(201, 201))$.

证明 令 $n = 407$, 可得 $f_1(x; 201, 200) = x^7 - 399x^6 - 2414x^5 + 77168x^4 + 283390x^3 + 165220x^2 - 160390x - 802$ 和 $f_2(x; 201, 201) = x^7 - 400x^6 - 2014x^5 + 79184x^4 + 204213x^3 - 38588x^2 - 121804x + 40200$. 容易验证当 $x < -3$ 时, $f_1(x; 201, 200) - f_2(x; 201, 201) < 0$, 但 $f_2(-3; 201, 201) = 1154088 > 0$, 因此 $\lambda_n(G_1^c(201, 200)) > \lambda_n(G_2^c(201, 201))$.

备注2 结论1和结论2验证了最小特征值最小的单圈图的补图不是唯一的, 即使其阶数大于20. 因此, 文献[9]中的主要结果并不完全正确。

参考文献:

- [1] YE M L, FAN Y Z, LIANG D. The Least Eigenvalue of Graphs with Given Connectivity[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 430(04): 1375-1379.

- [2] HONG Y, SHU J L. Sharp Lower Bounds of the Least Eigenvalue of Planar Graphs[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1999, 296(01-03):227-232.
- [3] LIU Z, ZHOU B. On Least Eigenvalues of Bicyclic Graphs with Fixed Number of Pendant Vertices[J]. *Journal of Mathematical Sciences*, 2012, 182(02):175-192.
- [4] WANG Y, FAN Y Z. The Least Eigenvalue of Graphs with Cut Edges[J]. *Graphs and Combinatorics*, 2012, 28(04):555-561.
- [5] LI S, WANG S. The Least Eigenvalue of the Signless Laplacian of the Complements of Trees[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2012, 436(07):2398-2405.
- [6] YU G D, FAN Y Z, YE M L. The Least Signless Laplacian Eigenvalue of the Complements of Unicyclic Graphs[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 306(03):13-21.
- [7] JIANG G, YU G, SUN W, et al. The Least Eigenvalue of Graphs Whose Complements Have Only Two Pendent Vertices[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 331(05):112-119.
- [8] FAN Y Z, ZHANG F F, WANG Y. The Least Eigenvalue of the Complements of Trees[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2011, 435(09):2150-2155.
- [9] WANG Y, FAN Y Z, LI X X, et al. The Least Eigenvalue of Graphs Whose Complements are Unicyclic[J]. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2015, 35(02):249-260.

The Graft Transformations and Their Applications on the Least Eigenvalues of Graphs

WANG Dong-yi, FENG Xiao-yun, ZHANG Wei-juan, WANG Guo-ping*

(School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi, Xinjiang, 830017, China)

Abstract: Suppose G is a connected simple graph with the vertex set $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Then the adjacency matrix of G is $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$, where $a_{ij} = 1$ if v_i is adjacent to v_j , and otherwise $a_{ij} = 0$. Since $A(G)$ is real and symmetric, its eigenvalues can be arranged as $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$, and the eigenvalues of $A(G)$ are also called the eigenvalues of G . In this paper we first give three graft transformations on the least eigenvalues of graphs are given and then as their applications two connected graphs on $n \geq 12$ vertices whose least eigenvalues can be minimum among the complements of all unicyclic graphs are given, which modifies the main result in literature [9].

Keywords: Transformation; The least eigenvalue; Unicyclic graph; Complement of graph