第43卷　第2期　《新疆师范大学学报》(自然科学版)　Vol.43, No.2
2024年6月　Journal of Xinjiang Normal University　Jun. 2024
(Natural Sciences Edition)

两类特殊的双扭曲积埃尔米特流形

张　辉[1],卢晓英[2],何　勇[1*],韩江慧[1]
(1.新疆师范大学 数学科学学院,新疆 乌鲁木齐 830017;2.陆军边海防学院乌鲁木齐校区 教学考评中心,新疆 乌鲁木齐 830002)

摘　要: 设(M_1, g)和(M_2, h)是两个埃尔米特流形,双扭曲积埃尔米特流形$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是赋予了扭曲积埃尔米特度量$G = f_2^2 g + f_1^2 h$的乘积流形$M_1 \times M_2$,其中$f_1$和$f_2$分别是$M_1$和$M_2$上的正值光滑函数。文章给出双扭曲积埃尔米特流形的挠率表达式,得到双扭曲积埃尔米特流形是凯勒流形或平衡流形的充要条件,并在特定条件下给出双扭曲积埃尔米特流形满足弱爱因斯坦条件的充要条件。

关键词: 埃尔米特流形;双扭曲积;平衡流形;弱爱因斯坦条件

中图分类号: O186.1　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1008-9659(2024)02-0026-06

扭曲积是几何学中构造具有特殊曲率性质流形的重要方法。1969年,Bishop等人用扭曲积的方法构造了具有负截面曲率的黎曼流形[1]。2016年,何勇等人把扭曲积的概念推广到了复芬斯勒流形,并得到了双扭曲积复芬斯勒流形是凯勒芬斯勒流形的充要条件[2]。2018年,何勇等人把双扭曲积引入到了复几何,给出了双扭曲积埃尔米特流形满足第一或第二爱因斯坦条件的充要条件[3]。2022年,倪琪慧等人用双扭曲积给出了构造Levi-Civita Ricci平坦埃尔米特流形的有效方法[4]。

埃尔米特几何在数学、物理、计算机等领域有着广泛应用[5-6],吸引了许多学者的关注和研究。当埃尔米特流形的挠率为零时,称其为凯勒流形[7]。1982年,Michelsohn提出了平衡流形的概念,平衡流形是凯勒流形的推广[8]。当埃尔米特流形的挠率(1,0)形式为零时,称其为平衡流形[8]。2014年,刘克峰等人给出了紧的埃尔米特流形是平衡流形的四个等价条件[9]。文章将探索并给出双扭曲积埃尔米特流形是凯勒流形或平衡流形的充要条件。

1985年,Balas给出了埃尔米特流形满足爱因斯坦条件的概念[10]。若埃尔米特流形的第一或第二Ricci曲率张量系数等于λ倍的埃尔米特度量,则称埃尔米特流形满足第一或第二爱因斯坦条件,其中λ为实函数[10]。1987年,Kobayashi引入了埃尔米特流形满足弱爱因斯坦条件的概念[11]。文章将在特定条件下研究双扭曲积埃尔米特流形满足弱爱因斯坦条件的充要条件。

1　预备知识

设(M, J, G)是一个复n维埃尔米特流形,J为复结构,G为埃尔米特度量。对于流形M中任意一个点p,复化切丛可分解为

$$T_p^{\mathbb{C}} M = T_p^{1,0} M \oplus T_p^{0,1} M$$

其中复结构J的特征值分别为$\pm\sqrt{-1}$. 在局部全纯坐标系$z = (z^1, z^2, \cdots, z^n)$下,切丛$T_p^{1,0}M$由$(\frac{\partial}{\partial z^1}, \frac{\partial}{\partial z^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^n})$张成。

陈联络∇在全纯切丛上是唯一的与度量G和复结构J相容的联络。在局部全纯坐标系下,陈联络系

[收稿日期]2023-09-05　　[修回日期]2023-09-23
[基金项目]国家自然科学基金项目(12661088;11761069)。
[作者简介]张　辉(1999-),男,硕士研究生,主要从事多复变与复几何方面研究,E-mail:zh1161284865@163.com.
* [通讯作者]何　勇(1979-),男,教授,主要从事多复变与复几何方面研究,E-mail:heyong@xjnu.edu.cn.

数为[3]

$$\Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha} = G^{\bar{\delta}\beta}\frac{\partial G_{\alpha\bar{\delta}}}{\partial z^{\gamma}} \tag{1}$$

及其共轭。

挠率张量为[12]

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

其系数为

$$T^{\beta}_{\gamma\alpha} = \Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} \tag{2}$$

(1,3)型的陈曲率张量K为[11]

$$K(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

其系数为

$$K^{\beta}_{\alpha\gamma\bar{\delta}} = -\frac{\partial \Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha}}{\partial \bar{z}^{\delta}} \tag{3}$$

对(1,3)型的陈曲率张量缩并可得平均曲率,其系数为[11]

$$K^{\beta}_{\alpha} = G^{\bar{\delta}\gamma}K^{\beta}_{\alpha\gamma\bar{\delta}} \tag{4}$$

下面回顾文章研究所需要的几个重要定义。

定义 1[10]　设(M, J, G)是一个埃尔米特流形,若

$$T^{\beta}_{\gamma\alpha} = 0 \tag{5}$$

则称(M, J, G)是凯勒流形。

定义 2[8]　设(M, J, G)是一个埃尔米特流形,若挠率(1,0)形式

$$\tau_{\gamma} = 0 \tag{6}$$

则称(M, J, G)是平衡流形,其中

$$\tau_{\gamma} = G^{\bar{\eta}\alpha}T_{\gamma\alpha\bar{\eta}} \tag{7}$$

$$T_{\gamma\alpha\bar{\eta}} = G_{\beta\bar{\eta}}T^{\beta}_{\gamma\alpha} \tag{8}$$

定义 3[11]　设(M, J, G)是一个埃尔米特流形,若平均曲率满足

$$K = \varphi I, \qquad i.e., \qquad K^{\beta}_{\alpha} = \varphi\delta^{\beta}_{\alpha} \tag{9}$$

其中,φ是M上的一个函数,则称(M, J, G)满足弱爱因斯坦条件。

定义 4[13]　复拉普拉斯算子

$$L = G^{\bar{\beta}\alpha}\frac{\partial^2}{\partial z^{\alpha}\partial \bar{z}^{\beta}} \tag{10}$$

是一个具有光滑系数的二阶偏微分算子。

设(M_1, g)和(M_2, h)分别是复m维和复n维的埃尔米特流形,则$M = M_1 \times M_2$是一个复$m + n$维的埃尔米特流形。设$\pi_1:M \to M_1$和$\pi_2:M \to M_2$为自然投影,对任意的$z = (z_1, z_2) \in M, z_1 = (z^1, \cdots, z^m) \in M_1$和$z_2 = (z^{m+1},\cdots, z^{m+n}) \in M_2$,有$\pi_1(z) = z_1$和$\pi_2(z) = (z_2)$成立。

设$d\pi_1:T^{1,0}(M) \to T^{1,0}M_1, d\pi_2:T^{1,0}(M) \to T^{1,0}M_2$分别是由$\pi_1$和$\pi_2$诱导的全纯切映射。对于任意$v = (v_1, v_2) \in T_z^{\ 1,0}(M), v_1 = (v^1,\cdots,v^m) \in T_{z_1}^{\ 1,0}M_1, v_2 = (v^{m+1},\cdots,v^{m+n}) \in T^{1,0}_{z_2}M_2$,有$d\pi_1(z,v) = (z_1,v_1)$和$d\pi_2(z,v) = (z_2, v_2)$成立。

定义 5[3]　设(M_1,g)和(M_2,h)是两个埃尔米特流形。设$f_1:M_1 \to (0, +\infty)$和$f_2:M_2 \to (0,+\infty)$是两个光滑函数。双扭曲积埃尔米特流形$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2,G)$是赋予了如下埃尔米特度量$G:M \to (0, +\infty)$的乘积流形$M = M_1 \times M_2$:

$$G(z,v) = (f_2 \circ \pi_2)^2(z)g(\pi_1(z),d\pi_1(v)) + (f_1 \circ \pi_1)^2(z)h(\pi_2(z),d\pi_2(v)) \tag{11}$$

其中$z = (z_1, z_2) \in M,v = (v_1,v_2) \in T_z^{1,0}M$,$f_1$和$f_2$被称为扭曲函数。$(M_1, g)$和$(M_2, h)$被称为$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2,G)$的分量流形。

若$f_1 \equiv 1$与$f_2 \equiv 1$有且仅有一个成立,则称$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2,G)$是单扭曲积埃尔米特流形;若$f_1 \equiv 1$且$f_2 \equiv 1$都成立,则称$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2,G)$是乘积埃尔米特流形;若$f_1$和$f_2$都不为常数,则称$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2,G)$是非平凡的双扭曲

积埃尔米特流形。

在文章中,约定小写希腊字母指标,小写拉丁字母指标,带撇号的小写拉丁字母指标的取值范围分别为:$1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma, \eta, \delta \leqslant m + n, 1 \leqslant i, j, k, l, t \leqslant m, m + 1 \leqslant i', j', k', l', t' \leqslant m + n$. 与$(M_1, g)$和$(M_2, h)$有关的几何量,分别在其上方加指标1和2以示区别,如$\overset{1}{\Gamma}{}^{i}_{jk}$和$\overset{2}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'}$分别表示埃尔米特流形$(M_1, g)$和$(M_2, h)$上的陈联络系数。

设$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是埃尔米特流形$(M_1, g)$和$(M_2, h)$的双扭曲积,记

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 g}{\partial v^i \partial \overline{v^j}}, \quad h_{i'\bar{j}'} = \frac{\partial^2 h}{\partial v^{i'} \partial \overline{v^{j'}}} \tag{12}$$

则G的基本张量矩阵为[3]

$$(G_{\alpha\bar{\beta}}) = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v^{\alpha} \partial \overline{v^{\beta}}}\right) = \begin{pmatrix} f_2^2 g_{i\bar{j}} & 0 \\ 0 & f_1^2 h_{i'\bar{j}'} \end{pmatrix} \tag{13}$$

其逆矩阵$(G^{\bar{\beta}\alpha})$为[3]

$$(G^{\bar{\beta}\alpha}) = \begin{pmatrix} f_2^{-2} g^{\bar{j}i} & 0 \\ 0 & f_1^{-2} h^{\bar{j}'i'} \end{pmatrix} \tag{14}$$

2 平衡的双扭曲积埃尔米特流形

以下主要推导双扭曲积埃尔米特流形挠率的表达式,探索双扭曲积埃尔米特流形$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是凯勒流形或平衡流形的充要条件。

引理1[3] 设$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是一个双扭曲积埃尔米特流形,则陈联络系数$\Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha}$为

$$\Gamma^{i}_{jk} = \overset{1}{\Gamma}{}^{i}_{jk}, \ \Gamma^{i}_{j'k} = 2f_2^{-1}\frac{\partial f_2}{\partial z^{j'}}\delta^{i}_{k}, \ \Gamma^{i'}_{jk'} = 2f_1^{-1}\frac{\partial f_1}{\partial z^{j}}\delta^{i'}_{k'}, \ \Gamma^{i'}_{j'k'} = \overset{2}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} \tag{15}$$

$$\Gamma^{i}_{jk'} = \Gamma^{i}_{j'k'} = \Gamma^{i'}_{jk} = \Gamma^{i'}_{j'k} = 0 \tag{16}$$

命题1 设$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是一个双扭曲积埃尔米特流形,则$T^{\beta}_{\gamma\alpha}$为

$$T^{i}_{jk} = \overset{1}{T}{}^{i}_{jk}, \ T^{i'}_{j'k'} = \overset{2}{T}{}^{i'}_{j'k'} \tag{17}$$

$$T^{i}_{j'k} = 2f_2^{-1}\frac{\partial f_2}{\partial z^{j'}}\delta^{i}_{k}, \quad T^{i}_{jk'} = -2f_2^{-1}\frac{\partial f_2}{\partial z^{k'}}\delta^{i}_{j} \tag{18}$$

$$T^{i'}_{j'k} = -2f_1^{-1}\frac{\partial f_1}{\partial z^{k}}\delta^{i'}_{j'}, \quad T^{i'}_{jk'} = 2f_1^{-1}\frac{\partial f_1}{\partial z^{j}}\delta^{i'}_{k'} \tag{19}$$

$$T^{i}_{j'k'} = T^{i'}_{jk} = 0 \tag{20}$$

证明 令式(2)中$\alpha = k, \beta = i, \gamma = j$,并将式(15)的第一个等式代入可得

$$T^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} - \Gamma^{i}_{kj} = \overset{1}{\Gamma}{}^{i}_{jk} - \overset{1}{\Gamma}{}^{i}_{kj} = \overset{1}{T}{}^{i}_{jk}$$

同理,可得其余等式。

定理1 设$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是一个双扭曲积埃尔米特流形,$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是凯勒流形当且仅当$(M_1, g)$和$(M_2, h)$都是凯勒流形,且$f_1$和$f_2$均为常数。

证明 根据定义1,$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是一个凯勒流形当且仅当$T^{\beta}_{\gamma\alpha} = 0$,结合命题1,这等价于以下方程组成立。

$$\begin{cases} \overset{1}{T}{}^{i}_{jk} = 0 \\ \overset{2}{T}{}^{i'}_{j'k'} = 0 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z^{k}} = 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z^{k'}} = 0 \end{cases} \tag{21}$$

式(21)中第一个和第二个方程分别意味着(M_1,g)和(M_2,h)是凯勒流形，式(21)中第三个和第四个方程分别意味着f_1和f_2均为常数，证毕。

命题2　设$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是一个双扭曲积埃尔米特流形，则$T_{\gamma\alpha\bar{\eta}}$为

$$T_{jk\bar{l}} = f_2^2 \overset{1}{T}_{jk\bar{l}},\ T_{j'k'\bar{l}'} = f_1^2 \overset{2}{T}_{j'k'\bar{l}'} \tag{22}$$

$$T_{jk'\bar{l}} = -2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial z^{k'}} g_{j\bar{l}},\ T_{jk'\bar{l}'} = 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial z^j} h_{k'\bar{l}'} \tag{23}$$

$$T_{j'k\bar{l}} = 2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial z^{j'}} g_{k\bar{l}},\ T_{j'k\bar{l}'} = -2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial z^k} h_{j'\bar{l}'} \tag{24}$$

$$T_{jk\bar{l}'} = T_{j'k'\bar{l}} = 0 \tag{25}$$

证明　令式(8)中$\alpha = k, \gamma = j, \eta = l$，可得

$$T_{jk\bar{l}} = G_{\beta\bar{l}} T^{\beta}_{jk} = G_{i\bar{l}} T^{i}_{jk} + G_{i'\bar{l}} T^{i'}_{jk} \tag{26}$$

将式(17)的第一个等式和式(13)代入式(26)，得

$$T_{jk\bar{l}} = f_2^2 g_{i\bar{l}} \overset{1}{T}{}^{i}_{jk} = f_2^2 \overset{1}{T}_{jk\bar{l}}$$

同理，可得其余等式。

命题3　设$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是一个双扭曲积埃尔米特流形，则$\tau_\gamma$为

$$\tau_j = \overset{1}{\tau}_j + 2f_1^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial z^j} \tag{27}$$

$$\tau_{j'} = \overset{2}{\tau}_{j'} + 2f_2^{-1} \frac{\partial f_2}{\partial z^{j'}} \tag{28}$$

证明　令式(7)中$\gamma = j$，可得

$$\tau_j = G^{\bar{\eta}\alpha} T_{j\alpha\bar{\eta}} = G^{\bar{l}k} T_{jk\bar{l}} + G^{\bar{l}k'} T_{jk'\bar{l}} + G^{\bar{l}'k} T_{jk\bar{l}'} + G^{\bar{l}'k'} T_{jk'\bar{l}'} \tag{29}$$

将式(14)和命题2中各式代入式(29)有

$$\begin{aligned}\tau_j &= f_2^{-2} g^{\bar{l}k} f_2^2 \overset{1}{T}_{jk\bar{l}} + f_1^{-2} h^{\bar{l}'k'} 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial z^j} h_{k'\bar{l}'} \\ &= g^{\bar{l}k} \overset{1}{T}_{jk\bar{l}} + 2f_1^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial z^j} \\ &= \overset{1}{\tau}_j + 2f_1^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial z^j}\end{aligned}$$

同理可证得式(28)。

定理2　设$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是一个双扭曲积埃尔米特流形，则$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是平衡流形当且仅当以下方程组成立

$$\begin{cases} \overset{1}{\tau}_j + 2f_1^{-1} \dfrac{\partial f_1}{\partial z^j} = 0 \\ \overset{2}{\tau}_{j'} + 2f_2^{-1} \dfrac{\partial f_2}{\partial z^{j'}} = 0 \end{cases} \tag{30}$$

证明　根据定义2，$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是平衡流形当且仅当$\tau_\gamma = 0$，这等价于

$$\begin{cases} \tau_j = 0 \\ \tau_{j'} = 0 \end{cases} \tag{31}$$

结合式(27)和式(28)，式(31)等价于式(30)成立。

推论1　设$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是一个双扭曲积埃尔米特流形。若$f_1$和$f_2$是常数，则$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2, G)$是平衡流形当且仅当$(M_1,g)$和$(M_2,h)$均为平衡流形。

3　弱爱因斯坦条件

以下主要推导双扭曲积埃尔米特流形的平均曲率表达式，并在特定条件下给出双扭曲积埃尔米特流形满足弱爱因斯坦条件的充要条件。

引理2[3] 设$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2,G)$是一个双扭曲积埃尔米特流形,则陈曲率张量系数$K_{\alpha\gamma\bar{\delta}}^{\beta}$为

$$K_{kj\bar{s}}^{t} = \overset{1}{K}{}_{kj\bar{s}}^{t},\ K_{kj'\bar{s}'}^{t} = -2\frac{\partial^2 \ln f_2}{\partial z^{j'}\partial \bar{z}^{s'}}\delta_k^t \tag{32}$$

$$K_{k'j'\bar{s}'}^{t'} = \overset{2}{K}{}_{k'j'\bar{s}'}^{t'},\quad K_{k'j\bar{s}}^{t'} = -2\frac{\partial^2 \ln f_1}{\partial z^{j}\partial \bar{z}^{s}}\delta_{k'}^{t'} \tag{33}$$

$$K_{k'j\bar{s}}^{t} = K_{kj'\bar{s}}^{t} = K_{kj\bar{s}'}^{t} = K_{k'j'\bar{s}}^{t} = K_{k'j\bar{s}'}^{t} = K_{k'j'\bar{s}}^{t} = 0 \tag{34}$$

$$K_{kj\bar{s}}^{t'} = K_{kj'\bar{s}}^{t'} = K_{kj\bar{s}'}^{t'} = K_{k'j'\bar{s}}^{t'} = K_{kj'\bar{s}'}^{t'} = K_{k'j\bar{s}'}^{t'} = 0 \tag{35}$$

命题4 设$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2,G)$是一个双扭曲积埃尔米特流形,则平均曲率系数$K_{\alpha}^{\beta}$为

$$K_k^t = f_2^{-2}\overset{1}{K}{}_k^t - 2f_1^{-2}\overset{2}{L}(\ln f_2)\delta_k^t,\ K_k^{t'} = 0 \tag{36}$$

$$K_{k'}^{t'} = f_1^{-2}\overset{2}{K}{}_{k'}^{t'} - 2f_2^{-2}\overset{1}{L}(\ln f_1)\delta_{k'}^{t'},\ K_{k'}^{t} = 0 \tag{37}$$

证明 令式(4)中$\beta = t,\alpha = k$,则有

$$K_k^t = G^{\bar{\delta}\gamma}K_{k\gamma\bar{\delta}}^t = G^{\bar{s}j}K_{kj\bar{s}}^t + G^{\bar{s}j'}K_{kj'\bar{s}}^t + G^{\bar{s}'j}K_{kj\bar{s}'}^t + G^{\bar{s}'j'}K_{kj'\bar{s}'}^t \tag{38}$$

把式(14),式(32)和式(33)的第一个式子代入式(38)中,可得

$$\begin{aligned} K_k^t &= f_2^{-2}g^{\bar{s}j}\overset{1}{K}{}_{kj\bar{s}}^t - 2f_1^{-2}h^{\bar{s}'j'}\frac{\partial^2 \ln f_2}{\partial z^{j'}\partial \bar{z}^{s'}}\delta_k^t \\ &= f_2^{-2}\overset{1}{K}{}_k^t - 2f_1^{-2}\overset{2}{L}(\ln f_2)\delta_k^t \end{aligned}$$

同理,可得其余等式。

定理3 设$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2,G)$是一个双扭曲积埃尔米特流形。若$\overset{1}{L}(\ln f_1) = 0$和$\overset{2}{L}(\ln f_2) = 0$,则$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2,G)$满足弱爱因斯坦条件当且仅当$(M_1,g)$和$(M_2,h)$均满足弱爱因斯坦条件。

证明 由于$\overset{1}{L}(\ln f_1) = 0$和$\overset{2}{L}(\ln f_2) = 0$,根据命题4,易得

$$K_k^t = f_2^{-2}\overset{1}{K}{}_k^t \tag{39}$$

$$K_{k'}^{t'} = f_1^{-2}\overset{2}{K}{}_{k'}^{t'} \tag{40}$$

根据定义3,$({}_{f_2}M_1 \times {}_{f_1}M_2,G)$满足弱爱因斯坦条件当且仅当$K_{\alpha}^{\beta} = \varphi(z)\delta_{\alpha}^{\beta}$,这等价于

$$\begin{cases} K_k^t = \varphi(z)\delta_k^t \\ K_{k'}^{t'} = \varphi(z)\delta_{k'}^{t'} \\ K_k^{t'} = \varphi(z)\delta_k^{t'} \\ K_{k'}^{t} = \varphi(z)\delta_{k'}^{t} \end{cases} \tag{41}$$

由于$K_k^{t'} = 0$和$\delta_k^{t'} = 0$,式(41)的第三个方程明显成立,同理式(41)的第四个方程也自然成立,再应用式(39)和式(40),式(41)可化简为

$$\begin{cases} \overset{1}{K}{}_k^t = f_2^2\varphi(z)\delta_k^t \\ \overset{2}{K}{}_{k'}^{t'} = f_1^2\varphi(z)\delta_{k'}^{t'} \end{cases} \tag{42}$$

式(42)的第一个方程中$\overset{1}{K}{}_k^t$和δ_k^t仅与(M_1,g)有关,$f_2^2\varphi(z)$就只能与(M_1,g)有关。同理,由式(42)的第二个方程可知,$f_1^2\varphi(z)$就只能与(M_2,h)有关。因此可设

$$\begin{cases} f_2^2\varphi(z) = \varphi_1(z_1) \\ f_1^2\varphi(z) = \varphi_2(z_2) \end{cases} \tag{43}$$

从而式(42)等价于

$$\begin{cases} \overset{1}{K}{}_k^t = \varphi_1(z_1)\delta_k^t \\ \overset{2}{K}{}_{k'}^{t'} = \varphi_2(z_2)\delta_{k'}^{t'} \end{cases} \tag{44}$$

式(44)中两个方程分别等价于(M_1,g)和(M_2,h)满足弱爱因斯坦条件,证毕。

4　结论

文章计算了双扭曲积埃尔米特流形的挠率和挠率1形式的表达式,得到了双扭曲积埃尔米特流形是凯勒流形或平衡流形的充要条件。通过计算双扭曲积埃尔米特流形的平均曲率,在特定条件下给出了双扭曲积埃尔米特流形满足弱爱因斯坦条件的充要条件。文章主要研究了两类特殊的双扭曲积埃尔米特流形,在一定程度上促进了双扭曲积埃尔米特流形的研究,但文章未给出这两类特殊的双扭曲积埃尔米特流形的例子。在后期的学习和工作中,将在此基础上致力于构造出满足特殊条件的双扭曲积埃尔米特流形的具体例子。

参考文献:

[1] BISHOP R,O′NEILL B. Manifolds of Negative Curvature[J]. Transactions of the American Mathematical Society,1969,14(05):1-49.

[2] HE Y,ZHONG C P. On Doubly Warped Product of Complex Finsler Manifolds[J]. Acta Mathematica Scientia,2016,36(06):1747-1766.

[3] 何勇,张晓玲. 双扭曲积Hermitian流形[J]. 数学学报,2018,61(05):835-842.

[4] NI Q H,HE Y,YANG J H,et al. Levi-civita Ricci-flat Doubly Warped Product Hermitian Manifolds[J]. Advances in Mathematical Physics,2022,509(02),125981.

[5] CHANG S,KUO T,LAI S. Li-Yau Gradient Estimate and Entropy Formulae for the CR Heat Equation in a Closed Pseudohermitian 3-manifold[J]. Journal of differential geometry,2011,89(02):185-216.

[6] KOLODZIEJ S,NGUYEN N. Weak Solutions to Monge-ampère Type Equations on Compact Hermitian Manifold with Boundary[J]. ArXiv:2208. 13129,2022.

[7] 陈维桓,李兴校. 黎曼几何引论[M]. 北京:北京大学出版社,2002.

[8] MICHELSOHN M. On the Existence of Special Metrics in Complex Geometry[J]. Acta Mathematica,1982,143:261-295.

[9] LIU K F,YANG X K. Geometry of Hermitian Manifolds[J]. International Journal of Mathematics,2012,23(06):1250055.

[10] BALAS A. Compact Hermitian Manifolds of Constant Holomorphic Sectional Curvature[J]. Mathematische Zeitschrift,1985,189(02):193-210.

[11] KOBAYASHI S. Differential Geometry of Complex Vector Bundles[M]. Princeton:Princeton University Press,2014.

[12] YANG J M. Locally Conformal Kähler and Hermitian Yang-mills Metrics[J]. Chinese Annals of Mathematics,Series B,2021,42(04):511-518.

[13] RUDIN W. Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$[M]. Berlin:Springer Science and Business Media,2008.

[14] ALESSANDRINI L. A Characterization of Balanced Manifolds[J]. Comptes Rendus Mathematique,2014,352(04):345-350.

[15] CHIOSE I,RĂSDEACONU R,SUVAINA I. Balanced Manifolds and SKT Metrics[J]. ArXiv.1608.08721,2016.

[16] GANCHEV G,IVANOV S. Harmonic and Holomorphic 1-forms on Compact Balanced Hermitian Manifolds[J]. Differential Geometry and Its Applications,2001,14(01):79-93.

[17] 何勇. 复Einstein-Finsler双扭曲积度量[J]. 厦门大学学报(自然科学版),2017,56(02):216-219.

[18] KOZMA L,PETER I,VARGA C. Warped Product of Finsler Manifolds[J]. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math,2001,44:157-170.

[19] SUN L L,ZHONG C P. Weakly Complex Einstein-Finsler Vector Bundle[J]. Science China Mathematics,2018,61:1079-1088.

[20] PIOVANI R,TOMASSSINI A. Bott-chern Harmonic Forms on Complete Hermitian Manifolds[J]. International Journal of Mathematics,2019,30(05):1950028.

[21] XIAO W,HE Y,TIAN C,et al. Complex Einstein-Finsler Doubly Twisted Product Metrics[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2022,509(02):125981.

[22] YADAV S,CHAUBEY S. Hermitian Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions[J]. International Journal of Maps in Mathematics,2020,1(03):10-27.

[23] ZHANG X. Hermitian-Einstein Metrics on Holomorphic Vector Bundles over Hermitian Manifolds[J]. Journal of Geometry Physics,2005,53(03):315-335.

(下转第51页)